Kombinatorik

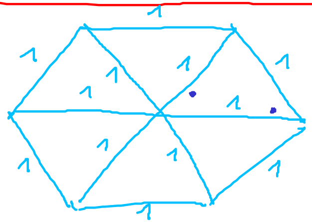
Referenz: [Engel: Problem Solving Strategies. Springer 1998, Ch. 4]
[Aigner-Ziegler: Proofs from the Book. Springer 2013, Ch. 25]

Schubfachprinzip (Pigeon hole principle): Für jede Abbildung f von einer endlichen Menge X in eine endliche Menge Y mit $|Y| < |X|$ existieren $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$ und $f(x) = f(x')$.

Anwendung 1: Es gibt zwei Schweizer ohne Glatze, die die gleiche Anzahl Haare auf dem Kopf tragen.

$$\left.\begin{array}{l}\#\text{Schweizer} > 1'000'000 \\ \#\text{Haare pro Kopf} < 500'000\end{array}\right\} !$$

Anwendung 2: Von beliebigen 7 Punkten in einem regelmässigen Hexagon der Seitenlänge 1 existieren 2 Punkte mit Abstand $\leqslant 1$.



Von den 7 Punkten liegen 2 in einem Dreieck

Deren Abstand ist ≤ 1.

Anwendung 3: Von je 5 Punkten auf einer Kugeloberfläche liegen 4 in einer abgeschlossenen Halbkugel.

Wähle 2 Punkte x, y und einen Grosskreis durch x, y.

$\Rightarrow$ Mindestens 2 der übrigen Punkte, z, w, liegen auf oder auf derselben Seite des Grosskreises.

$\Rightarrow$ $x, y, z, w \in$ Halbkugel.

Anwendung 4: Ein runder Tisch ist für n Personen gedeckt mit Namensschildern an jedem Platz. Nachdem sie sich gesetzt haben, stellen sie fest, dass keine an dem für sie vorgesehenen Platz sitzt. Zeige, dass man den Tisch so drehen kann, dass mindestens zwei Personen an dem richtigen Platz sitzen.

Für jeden Gast i sei k_i die Anzahl Schritte rechtsherum, bis i am richtigen Platz sitzt.

$$\left.\Rightarrow \underbrace{1 \le k_i \le n-1}_{\text{Anzahl } = n-1 \,<\, n}\right\} \Rightarrow \exists\, i \neq j : k_i = k_j .$$

Anwendung 5: Auf jeder Party mit n Gästen gibt es immer zwei Gäste, die die gleiche Anzahl von Bekannten unter den anderen Gästen haben.

Für Gast i sei k_i die Anzahl seiner Bekannten auf der Party.

$$\Rightarrow \underbrace{0 \le k_i \le n-1}_{\text{Anzahl } n \,=\, \text{Anzahl Gäste!}}$$

Wenn alle k_i verschieden sind, tritt jeder Wert $0 \le k \le n-1$ auf.

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} \exists\, i : k_i = 0 \Rightarrow i \text{ kennt niemanden} \\ \exists\, j : k_j = n-1 \Rightarrow j \text{ kennt jeden} \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{Widerspruch.}$$

Anwendung 6: Betrachte Teilmengen X_1, X_2 einer Menge X mit $|X_1|+|X_2| > |X|$. Dann ist $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$.

Sonst wäre $|X| \geq |X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2| \Rightarrow$ Widerspruch!

Anwendung 7: Jedes Element eines endlichen Körpers ist eine Summe von zwei Quadraten.

Beweis: $Q := \{x^2 \mid x \in k\} = \{0\} \cup \{x^2 \mid x \in k^\times\}$.

Für alle $x, y \in k^\times$ ist $x^2 = y^2 \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (y-x)(y+x) = 0 \Leftrightarrow y = \pm x$.

$\Rightarrow$ Höchstens zwei Elemente von $k^\times$ haben dasselbe Quadrat!

$|Q| \geq 1 + \frac{q-1}{2} = \frac{q+1}{2} > q/2$. falls $q := |k|$

Für jedes $a \in Q$ sei $a - Q := \{a - q \mid q \in Q\} \Rightarrow |a - Q| > q/2$.

$\Rightarrow |a-Q| + |Q| > q = |k| \overset{6}{\Longrightarrow} (a-Q) \cap Q \neq \varnothing$.

Also existieren $x, y \in k$: $a - x^2 = y^2 \Rightarrow a = x^2 + y^2$.

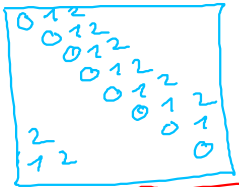
qed.

Verallgemeinertes Schubfachprinzip: Für jede Zerlegung einer endlichen Menge X mit $\geq mn+1$ Elementen in m disjunkte Teilmengen enthält eine dieser Teilmengen mindestens $n+1$ Elemente.

Bew.: Wenn nicht, ist $|X| \leq m \cdot n$. qed.

Anwendung 8: Von 33 Türmen auf dem Schachbrett kann man 5 auswählen, von denen keiner den anderen angreift.

$33 = 8 \cdot 4 + 1$



Koordinaten (i,j) mit $i,j = 1..8$

Färbe das Feld (i,j) mit der Farbe $i-j$ mod (8)

$\Rightarrow \exists\, 5$ Türme auf Feldern derselben Farbe.

Anwendung 9: Ramsey-Theorie

Satz 9a: Auf jeder Party mit 6 Gästen gibt es drei Gäste, die einander paarweise kennen, oder drei Gäste, die einander paarweise nicht kennen.

Bew.: Wähle Gast x. $\Rightarrow \begin{cases} \text{kennt 3 andere} \\ \text{oder kennt 3 nicht.} \end{cases}$

OBdA x kennt 3 andere a, b, c. Wenn von denen zwei a, b einander kennen $\Rightarrow$ fertig: a, b, x

Wenn nicht $\Rightarrow$ fertig mit a, b, c.

nach etwaigem Umdrehen der Relation.

qed.

Menge X

Satz 9b: Für beliebige $m, n \geqslant 2$ existiert $R(m,n)$, so dass auf jeder Party mit $\geqslant R(m,n)$ Gästen es immer m Gäste gibt, die einander paarweise kennen, oder n Gäste, die einander paarweise nicht kennen.

Bew.: Induktion über $m+n$.

$R(2,n) = n$ tut's.

$R(m,2) = m$ " .

Beh.: $R(m,n) := R(m,n-1) + R(m-1,n)$ tut's.

Bew.: Sei x ein Gast, $Y := \{ y \in X \mid x, y$ kennen sich $\}$ ($y \neq x$)

$Z := \{ z \in X \mid x, z$ kennen sich nicht $\}$ ($z \neq x$)

$\Rightarrow |Y| + |Z| + 1 = |X| \geq R(m,n) = R(m,n-1) + R(m-1,n)$

$\Rightarrow$ $|Y| \geq R(m-1,n)$ $\Rightarrow$ { Y enthält $m-1$ Gäste, die einander paarweise kennen. $\Rightarrow$ alle in $Y \cup \{x\}$ kennen einander $\Rightarrow$ fertig.
oder
Y enthält n Gäste, die einander paarweise nicht kennen. $\Rightarrow$ fertig.

oder

$|Z| \geq R(m,n-1)$ $\Rightarrow$ analog. { Z enthält m Gäste die einander paarweise kennen. $\Rightarrow$ fertig.
oder
Z " $n-1$ " " " " nicht kennen
$\Rightarrow$ $Z \cup \{x\}$ kennen einander paarweise nicht
$\Rightarrow$ fertig. qed.

$\forall x \in \mathbb{R}$: $\lfloor x \rfloor :=$ größte ganze Zahl $\le x$.
$\{x\} := x - \lfloor x \rfloor \Rightarrow 0 \le \{x\} < 1$.
$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$

Anwendung 10: Dirichlet Approximation

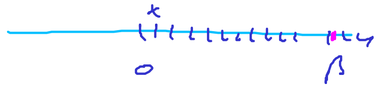
Satz 10a: Für jede reelle Zahl α und jede ganze Zahl $N \geqslant 1$ existieren ganze Zahlen p und q mit $1 \leqslant q \leqslant N$ und $|q\alpha - p| \leqslant \frac{1}{N}$.

Beweis: Für $\underbrace{0 \le i \le N}_{n+1 \text{ Stück}}$, $i \in \mathbb{Z}$, ist $\{i\alpha\} \in [0,1[= \coprod_{k=1}^{N} \underbrace{\left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right[}_{n \text{ Stück}}$.

$\Rightarrow \exists\, 0 \le i < j \le N$: $\{i\alpha\}, \{j\alpha\}$ in selben Teilintervall.
$\Rightarrow |\{i\alpha\} - \{j\alpha\}| \le \frac{1}{N}$.
$= |i\alpha - j\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor + \lfloor j\alpha \rfloor| = |q\alpha - p|$ für $q := j - i \Rightarrow 1 \le q \le N$, $p := \lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor$. qed

Folge 10b: Für jede irrationale reelle Zahl α und beliebige reelle Zahlen β sowie $\cancel{\varepsilon \geqslant 1}$ $\varepsilon > 0$ existieren ganze Zahlen a und b mit und $|a\alpha - b + \beta| \leqslant \varepsilon$.

Beweis: Wähle $N > \frac{1}{\varepsilon}$ und p, q wie in 10a.
Setze $x := q\alpha - p \Rightarrow |x| \le \frac{1}{N} < \varepsilon$. Da $\alpha \notin \mathbb{Q}$ ist $x \neq 0$.



$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}: |nx + \beta| < \varepsilon$.
$= |nq\alpha - np + \beta| \Rightarrow a = nq$, $b = np$.

qed

Folge 10c: Für jede irrationale reelle Zahl α ist die Menge $\{a\alpha + b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ dicht in $\mathbb{R}$.

d.h. $\forall \beta \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists a, b \in \mathbb{Z}: |a\alpha + b - \beta| < \varepsilon$.

Folge 10d: Es gibt eine Potenz von 2, deren Dezimaldarstellung mit den Ziffern 999999 beginnt.

Annahme: $\exists m \ge 6, n \in \mathbb{Z}$: $10^m > 2^n \ge 10^m - 10^{m-6} = 10^m \cdot (1 - 10^{-6})$

$\alpha := \frac{\log 2}{\log 10} \notin \mathbb{Q}$.
Will $\left| n \cdot \alpha - m + \frac{\varepsilon}{2\log 10} \right| < \frac{\varepsilon}{2 \log 10}$

$\Leftrightarrow m \cdot \log 10 > n \cdot \log 2 \ge m \cdot \log 10 - \varepsilon$ für $\varepsilon := -\log(1 - 10^{-6}) > 0$
$\Leftrightarrow m > n \cdot \frac{\log 2}{\log 10} \ge m - \frac{\varepsilon}{\log 10}$.

$\nearrow \mathbb{Z}^2$.

Folge 10e: Jede Gerade im $\mathbb{R}^2$ mit irrationaler Steigung kommt Gitterpunkten beliebig nahe.

$g: y = \alpha x + \beta$ für $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

$\forall \varepsilon > 0$ Nach (10b) $\exists\, a, b \in \mathbb{Z}: |\alpha a + \beta - b| \leq \varepsilon. \Rightarrow$

$P := (a, \alpha a + \beta) \in g.$

$Q := (a, b) \in \mathbb{Z}^2$

Folge 10f: Für jede irrationale reelle Zahl α existieren unendlich viele teilerfremde Paare von ganzen Zahlen p, q mit $q > 0$ und $|\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{q^2}$.

Bew.: Wenn nicht, wähle N größer als q für alle solchen (p, q).

(10a) $\Rightarrow \exists\, p, q \in \mathbb{Z},\ 1 \leq q \leq N,\ |q\alpha - p| \leq \frac{1}{N}$

$\Rightarrow |\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{qN} \leq \frac{1}{q^2}$ $\rightsquigarrow$ Widerspruch!

Verallgemeinerung 10g: Für beliebige reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und jede ganze Zahl $N \geqslant 1$ existieren ganze Zahlen $p_1, \ldots, p_n$ und q mit $1 \leqslant q \leqslant N^n$ und $|q\alpha_i - p_i| \leqslant \frac{1}{N}$ für $1 \leqslant i \leqslant n$.

Analog zu (10a): $v_i := (\{i\alpha_1\}, \ldots, \{i\alpha_n\}) \in [0, 1[^n$ für $0 \leq i \leq N^n$.

$\Rightarrow$ zwei liegen in derselben Box $\bigtimes_{i=1}^{n} [\frac{k_i - 1}{N}, \frac{k_i}{N}[$. $\Rightarrow$ fertig wie (10a).

Anwendung 11: Unter je $n+1$ verschiedenen ganzen Zahlen im Intervall $[1, 2n]$ existieren zwei, die zueinander teilerfremd sind.

$1 \le a_1 < \ldots < a_{n+1} \le 2n$.

Wegen $2n-1 \ge a_{n+1} - a_1 = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(a_{k+1} - a_k)}_{\ge 1}$, muss eine Differenz $= 1$ sein.
Die sind teilerfremd.

Anwendung 12: Unter je $n+1$ verschiedenen ganzen Zahlen im Intervall $[1, 2n]$ existieren zwei, von denen eine die andere teilt.

Schreibe jede $a_i = 2^{\nu_i} \cdot k_i$ für k_i ungerade, $\nu_i \ge 0$.

$\Rightarrow$ Für k_i gibt es n Möglichkeiten $\{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$

$\Rightarrow \exists\, i<j: k_i = k_j$. $\Rightarrow$ $a_i = 2^{\nu_i} k_i \mid 2^{\nu_j} k_j = a_j$.

Bemerkung: Beides gilt nicht für n verschiedene ganze Zahlen im Intervall $[1, 2n]$.

11: $2, 4, 6, \ldots, 2n$

12: $n+1, n+2, \ldots, 2n$.

Anwendung 13: Für jede Folge ganzer Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ mit $n \geqslant 1$ existieren $1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n$ mit

$$a_k + a_{k+1} + \ldots + a_\ell \equiv 0 \bmod (n).$$

Bew.: Für jedes $\underbrace{0 \le \ell \le n}_{n+1 \text{ Stück}}$ setze $\underbrace{S_\ell := \sum_{i=1}^{\ell} a_i \bmod (n)}_{n \text{ Möglichkeiten}}$

$\Rightarrow \exists\, 0 \le i < \ell \le n: S_i \equiv S_\ell \bmod (n)$ $\Rightarrow$ $S_\ell - S_i = \sum_{j=i+1}^{\ell} a_j \equiv 0 \ (n)$.

qed.

Anwendung 14: Für jede Menge X von 10 ganzen Zahlen im Intervall $[1,100]$ existieren nichtleere disjunkte Teilmengen $Y, Z \subseteq X$ mit

$$\boxed{\sum_{y\in Y} y = \sum_{z\in Z} z.}$$

Für jedes $\emptyset \neq Y \subseteq X$ setze $S_Y := \sum_{y\in Y} y$.

$\Rightarrow 1 \le S_Y \le 91+92+\dots+100 = (91+100)+(92+99)+\dots+(95+96) = 191\cdot 5 = 955$.

(Anzahl der Y) $= 2^{10}-1 = 1023 > 955$.

$\Rightarrow \exists\, Y \neq Z,\ Y, Z \subseteq X$, nichtleer mit $S_Y = S_Z$.

$\Rightarrow S_T + S_{Y'} = S_Y = S_Z = S_T + S_{Z'}$

$\Rightarrow S_{Y'} = S_{Z'}$

Schreibe $T := Y \cap Z$
$Y' := Y \setminus Z$
$Z' := Z \setminus Y$

$Y \neq Z \Rightarrow Y' \neq \emptyset$ oder $Z' \neq \emptyset$.

$\Rightarrow S_{Y'} = S_{Z'} > 0$. $\Rightarrow Y' \neq \emptyset$ und $Z' \neq \emptyset$. qed.

Anwendung 15: Jede Folge von $mn+1$ reellen Zahlen enthält eine monoton wachsende Teilfolge der Länge $m+1$ oder eine monoton fallende Teilfolge der Länge $n+1$.

$(a_0, \dots, a_{mn})$

Für jedes i sei t_i die maximale Länge einer wachsenden Teilfolge, die an der Stelle i beginnt.

Ist ein $t_i \ge m+1$ $\Rightarrow$ fertig.

Sonst sind alle $t_i \le m$.

$\Rightarrow$ Es gibt $i_0 < i_1 < \dots < i_n$ mit $\forall \nu$: $t_{i_\nu} = s =$ konst.

Beh.: $\forall \nu = 1 \dots n$: $a_{i_{\nu-1}} > a_{i_\nu}$.

Denn sonst wäre die monoton wachsende Teilfolge der Länge $t_{i_\nu} = s$, die bei i_ν beginnt, verlängerbar durch $a_{i_{\nu-1}}$ zu einer der Länge $s+1$, die bei $i_{\nu-1}$ beginnt $\Rightarrow$ ↯ qed.

$\Rightarrow$ streng monoton fallende Teilfolge der Länge $n+1$. qed.

Bemerkung: Dies gilt nicht für mn Zahlen anstatt $mn+1$.

Gegenbeispiel:
$(mn-m+1, \dots, mn; \dots\dots; m+1, \dots, 2m, 1, \dots, m)$.